

交流电路的谐振

制作：赵新月

注：部分资料来源于互联网

前言

- 谐振一般有下列用途:
 1. 测量 L, C, f : 实验粗测
 2. 选择频率: FM调频
 3. 滤波(陷波): 滤波器, 陷波器
 4. 电压放大: 调谐放大
 5. 作振荡器: LC振荡器
 6. 频率补偿:

1.实验目的

- 1.研究 RLC 串联电路的交流谐振现象；
- 2.测量 RLC 串联谐振电路的幅频特性曲线；
- 3.学习并掌握电路品质因数 Q 的测量方法及其物理意义。
- 4.了解毫伏表和信号源的模拟共地问题

2.实验仪器

- SG1646信号发生器
- DF2173B晶体管毫伏表
- 标准可调电容
- 标准可调电感
- 精密直流电阻箱ZX21

3. 串联谐振原理

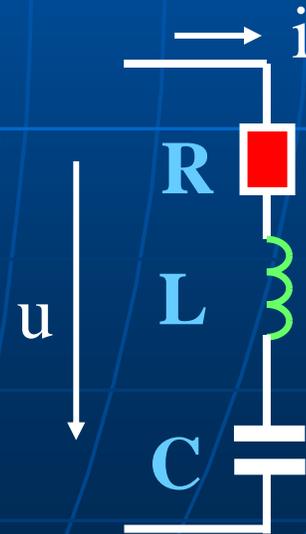
- 在具有电感和电容元件的电路中，电路两端的电压与其中的电流一般是相位不同的。如果调节电路的参数或调节电源的频率而使两者相位相同，电路中就会发生谐振现象。
- 谐振可分为**串联谐振**和**并联谐振**两种情况。

在R、L、C元件的串联电路中，

$$\text{当 } X_L = X_C \text{ 或 } 2\pi fL = 1/2\pi fC$$

$$\text{则 } \varphi = \text{arctg} \frac{X_L - X_C}{R} = 0$$

即电压 u 与电流 i 同相，这时电路发生了串联谐振。



发生串联谐振时，电源的频率与电路 f 的固有频率 f_0 相同，有

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

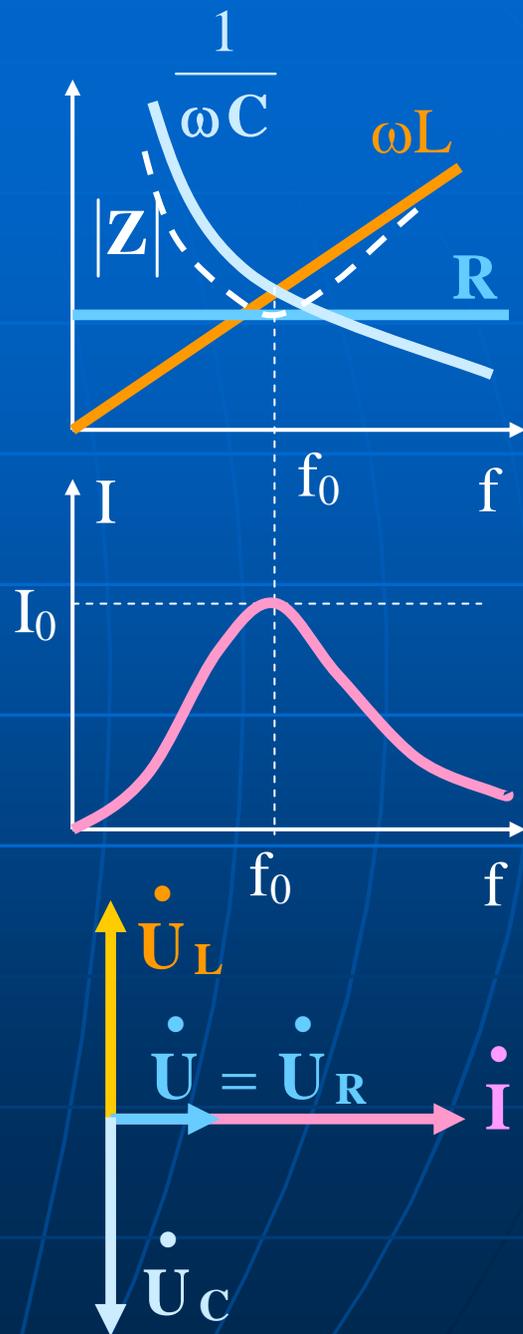
可见，调节电路的参数 L 、 C 或 f 都可能使电路发生谐振。电路的串联谐振具有以下特征。

(1) 电路的阻抗为最小值。

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$$

且电路的电流为最大值。

$$I = I_0 = U/R$$



(2) **谐振电路呈现电阻性。** 电源供给电路的能量全部被电阻所消耗，电源不与电路进行能量互换，能量的互换只发生在电感线圈和电容器之间。

(3) 由于 $X_L = X_C$ ，于是 $U_L = U_C$ 。而 \dot{U}_L 与 \dot{U}_C 在相位上相反，互相抵消，对整个电路不起作用。因此**电源电压 $U = U_R$ ，且相位也相同。**

但是， U_L 和 U_C 的单独作用不可忽视，因为

$$U_L = I X_L = \frac{U}{R} X_L \quad \text{及} \quad U_C = I X_C = \frac{U}{R} X_C$$

当 $X_L = X_C > R$ 时， U_L 和 U_C 都高于 U 。

在串联谐振时，电容及电感的端电压可能比电源电压高出许多倍，亦称之为电压谐振。此时电容器容易击穿，需考虑其安全性。

谐振电路的品质因数

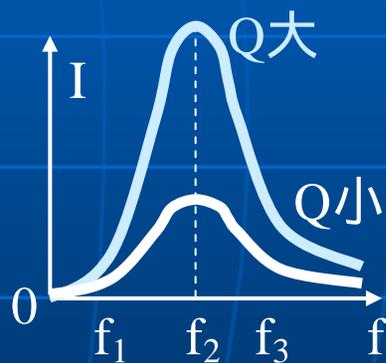
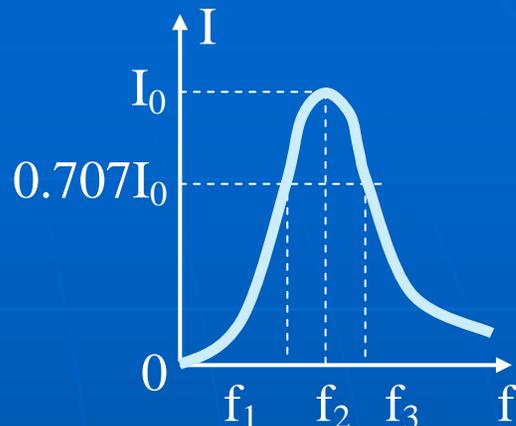
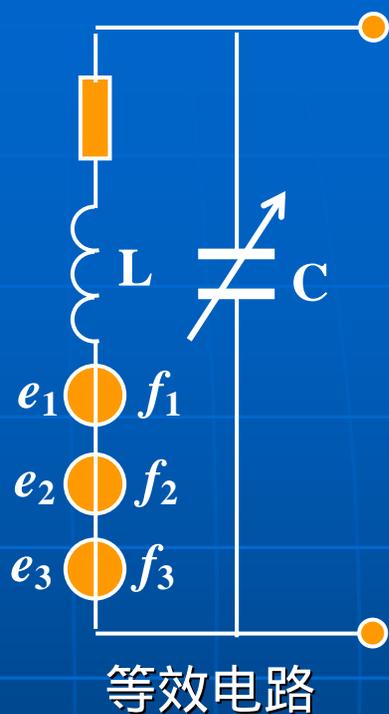
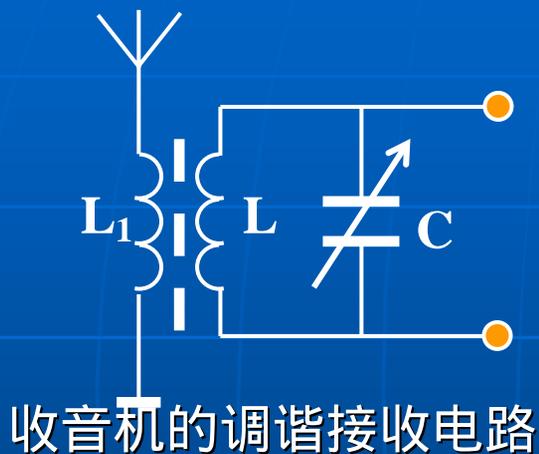
串联电路谐振时，电容或电感端电压与电源电压的比值称为电路的品质因数，用Q表示

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

串联谐振的应用

串联谐振在无线电工程中应用广泛，利用谐振的选择性对所需频率的信号进行选择 and 放大。而对其它不需要的频率加以抑制。

谐振选频的说明：



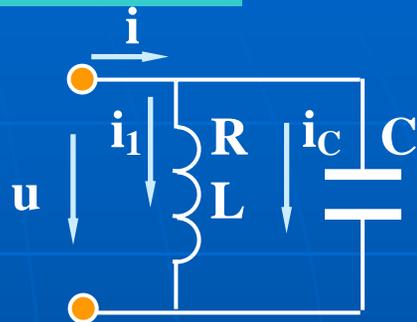
无线电信号经天线接受，由 L_1 耦合到 L 上。LC 经谐振选择使某个电波信号与谐振频率 f_0 相同进行选择。

当谐振曲线比较尖锐 (Q 大) 时，被选择信号比其相邻的信号相对大得多；而 Q 小则选择性差。

4. 并联谐振原理

电容器与线圈的并联电路，其等效阻抗为

$$Z = \frac{1}{\frac{j\omega C}{R + j\omega L} + (R + j\omega L)} = \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$



通常要求电阻很小，谐振时一般有 $\omega L \gg R$ ，则上式为

$$Z \approx \frac{j\omega L}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} = \frac{1}{\frac{RC}{L} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})}$$

上式分母中虚部为零时产生谐振，可得谐振频率为

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} \approx 0 \quad \text{或} \quad \omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

即 $f = f_0 \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ 与串联谐振频率近似相等。

并联谐振的特征

(1) 由阻抗公式

$$Z \approx \frac{j\omega L}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} = \frac{1}{\frac{RC}{L} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})}$$

谐振时电路的阻抗为

$$|Z_0| = 1 / \left(\frac{RC}{L} \right) = \frac{L}{RC} \quad \text{达到最大值，比非谐振时要大。}$$

在电源电压一定的情况下，电路中的谐振电流有最小值。即

$$I = I_0 = U / \left(\frac{RC}{L} \right) = \frac{U}{|Z_0|}$$

(2) 电路的总电压与电流相位相同($\varphi = 0$)，呈现电阻性。

(3) 各并联支路电流为

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (2\pi f_0 L)^2}} \approx \frac{U}{2\pi f_0 L} \quad \text{及} \quad I_C = \frac{U}{1/2\pi f_0 C}$$

$$\text{而 } |Z_0| = \frac{L}{RC} = \frac{2\pi f_0 L}{R(2\pi f_0 C)} \approx \frac{(2\pi f_0 L)^2}{R} = \frac{(\omega_0 L)^2}{R}$$

且当 $2\pi f_0 L \gg R$ 时，

$$2\pi f_0 L \approx \frac{1}{2\pi f_0 C} \ll \frac{(2\pi f_0 L)^2}{R} = \frac{(\omega_0 L)^2}{R}$$

于是， $I_1 \approx I_C \gg I_0$ 因此，并联谐振也称电流谐振。

I_C 或 I_1 与总电流 I_0 的比值为并联谐振电路的品质因数

$$Q = \frac{I_1}{I_0} = \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}$$

(4) 电路谐振时阻抗最大，得到的谐振电压也最大；而在非谐振时，则电路端电压较小。这种特性也具有选频作用，且 Q 越大选频作用越强。

5.实验任务:幅频特性(仅对串连而言)

- 1.根据给定的L,C算出理论谐振频率 f_{oi}
- 2.将信号源频率调节到 $\sim f_{oi}$ 附近,然后将输出电压调节到 $8.5V_{p-p}$ (即书上的3V)
- 3.微调频率同时观察电压表的指针摆动情况,当发现其摆动到最大值时,记下此时的信号源频率和电压表上的电压值,记为实际谐振频率 f_{op} 和 $U_{R_{max}}$
- 4.调节频率使电压表示数达到 $0.707 U_{R_{max}}$ 并记下两个截止频率点为 f_1 和 f_2
- 5.调节频率使频率分别为 $f_{op} \pm (0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5)KHz$,并记下相应的电压值
- 6.作出I-f曲线

5.实验任务:Q与R的关系(仅对串连而言)

- 1.将电阻箱R`放在0 ,电压表量程放在300V上
- 2.将电压表并接在C两端(切记保证同电位)
- 3.在 f_{op} 左右微调频率使C上的电压示数达到极大值,并记下此时的电压 $U_{C_{max}}$
- 4.将电阻箱R`放在30 ,130 等阻值,重复上面的2,3,4步骤.
- 5.根据公式 $Q = \frac{U_{C_{max}}}{U}$ 算出Q值,从而分析Q与R的关系

6.实验注意事项

- 1.注意交流电 V_{RMS} 与 V_{P-P} 的区别
- 2.注意毫伏表与信号源的同电位问题
- 3.注意理论谐振频率 f_{oi} 与实际谐振频率 f_{op} 与 f_{oc} 之间的异同.
- 4.注意选择合适的电压表量程来测量电压
- 5.注意避免击穿电容C

7.实验讨论

■ 1. 谐振回路中C和L的关系:

由于谐振频率与LC的乘积决定,因此必须先确定L/C的比值后,才能决定L,C的具体值.而L/C比值由负载,分布电容,接线电容等决定.一般串连谐振要求L/C较大,而并联谐振则要求L/C较小.

2. f_{oi} 与 f_{op} 与 f_{oc} 与 f_{oL} 之间的关系: 都不相等

8.应用事项

- 1. 电力工程上应避免发生电压谐振,以免谐振产生的高压损坏电容和电感的绝缘.
- 2. 电信工程上则相反,因为外来的信号常常很微弱,须把电路调节到谐振状态,得到C(L)上两端的较高电压.

附1:背景知识:

- 在考虑电阻、电感或电容元件时，都将它们看成是理想元件。即只考虑其主要因素而忽略其次要因素。
- 交流电路与直流电路对电阻、电感或电容的作用结果都不同。
- 电容对直流电路相当于开路；电感对直流电路相当于短路。
- 而在交流电路中电容有充放电现象存在，有电流通过电感有自感电动势出现而阻碍电流变化。

一. 电阻与电阻电路

- 如图，选择电流和电压的参考方向。根据欧姆定律可得

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{R}} \quad \text{或} \quad \mathbf{u} = \mathbf{iR}$$

即电阻端电压与其电流成正比。

若设 $\mathbf{i} = \mathbf{I}_m \sin \omega t$

则 $\mathbf{u} = \mathbf{RI}_m \sin \omega t = \mathbf{U}_m \sin \omega t$

显然 $\mathbf{U}_m = \mathbf{RI}_m$ 或 $\mathbf{U} = \mathbf{RI}$



如果用相量表示，将有

$$i = I_m \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_m = I_m \underline{/0^\circ} \quad \text{或} \quad \dot{I} = I \underline{/0^\circ}$$

$$u = U_m \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{U}_m = U_m \underline{/0^\circ} \quad \text{或} \quad \dot{U} = U \underline{/0^\circ}$$

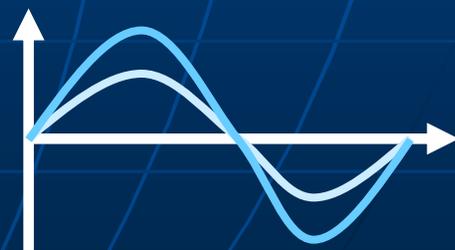
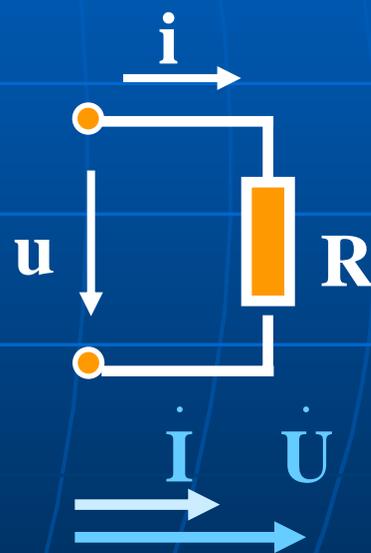
$$\text{且} \quad \dot{U}_m = R \dot{I}_m \quad \text{或} \quad \dot{U} = R \dot{I}$$

- 比较上面，可知交流电路中的电阻，其电流和电压相位相同。这就是相量形式的欧姆定律。也可写成

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R}$$

或

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R}$$



电阻在交流电路中的功率特性

(1) 瞬时功率：

在任意瞬时，电压瞬时值 u 与电流瞬时值 i 的乘积，称为瞬时功率，用字母 p 表示。

电阻的瞬时功率为

$$\begin{aligned} p &= p_R = ui = U_m I_m \sin^2 \omega t \\ &= \frac{U_m I_m}{2} (1 - \cos 2\omega t) = UI (1 - \cos 2\omega t) \end{aligned}$$

瞬时功率是在一个直流分量 UI 的基础上，另加一个幅值为 UI 的正弦量。但总有 $p \geq 0$ 。

(2) 平均功率：

在一个周期内，电路消耗电能的平均速率，即瞬时功率的平均值，称为平均功率。

交流电路中电阻元件的平均功率为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI(1 - \cos 2\omega t) dt \\ &= UI = I^2 R = U^2 / R \end{aligned}$$

例

—100Ω 电阻接入50Hz、有效值为10V的电源上，问电流是多少？若频率改为5000Hz呢？

因电阻与频率
无关，所以

$$I = \frac{U}{R} = \frac{10}{100} = 0.1 \text{ A} = 100 \text{ mA}$$

二. 电感与电感电路

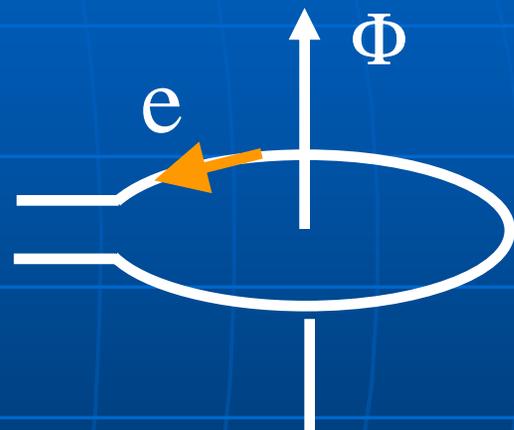
■ 电感元件

设一匝线圈，当通过它的磁通发生变化时，线圈中要产生感应电动势。其大小为

$$|e| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$$

根据物理学中的法拉第电磁感应定律，线圈中的感应电动势为

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$



对于N匝线圈，其感应电动势为匝线圈的N倍

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

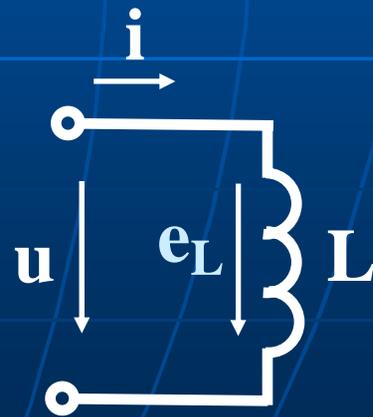
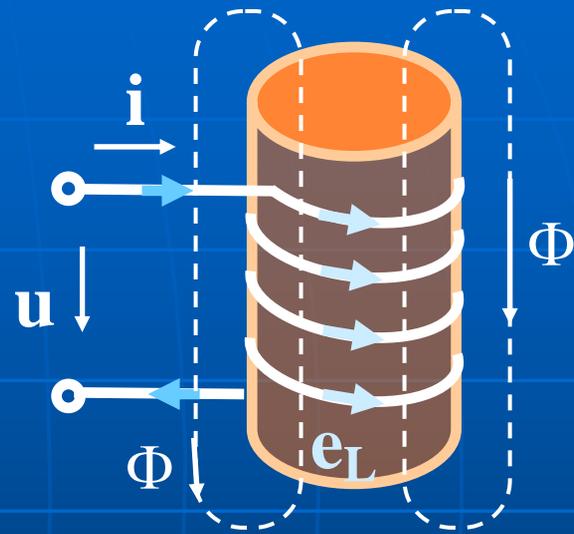
其中： $\Psi = N\Phi$ 称为磁通链。

当线圈中有电流 i 通过时， Ψ 或 Φ 与 i 成正比，即

$$\Psi = N\Phi = L i \quad \text{或} \quad L = \frac{\Psi}{i} = \frac{N\Phi}{i}$$

L 为线圈的电感(或自感)，它是线圈的结构参数。

$$\text{进而：} e_L = -L \frac{di}{dt}$$



电感的单位是亨利(H)

- 物理学中已导出均匀密绕线圈的电感为

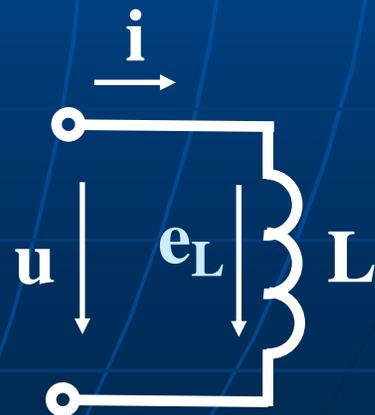
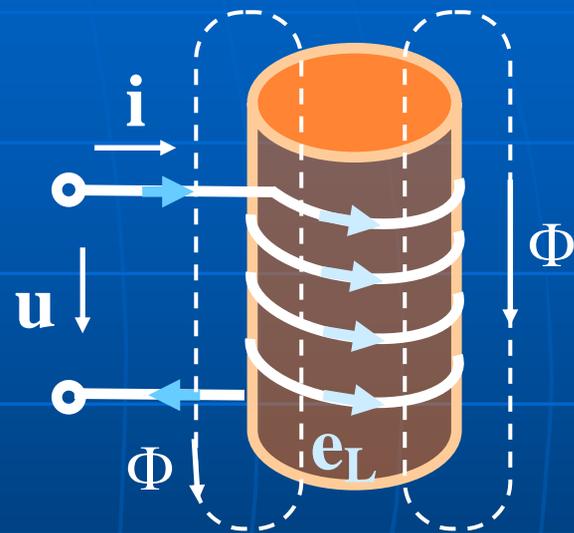
$$L = \frac{\mu SN^2}{l}$$

对于电感电路，应用克希荷夫定律可列出方程： $u + e_L = 0$

或 $u = -e_L = L \frac{di}{dt}$

自感电动势的方向符合楞茨定律
可得

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt = i_0 + \frac{1}{L} \int_0^t u dt$$



电感元件在某一时刻对能量转换量为

$$\int_0^t u i dt = \int_0^t L i di = \frac{1}{2} L i^2$$

- 即电感元件中的电流增大时，磁场的能量增大；在此过程中电感的能量在增大，即电感从电源取用能量。当电流见效时，磁场能量减小，磁能转换为电能，即电感元件向电源放还能量。

- 当设电流为参考相量时，

$$i = I_m \sin \omega t$$

则电感端电压为

$$u = L \frac{di}{dt}$$

计算得

$$u = L \frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt} = I_m \omega L \cos \omega t$$

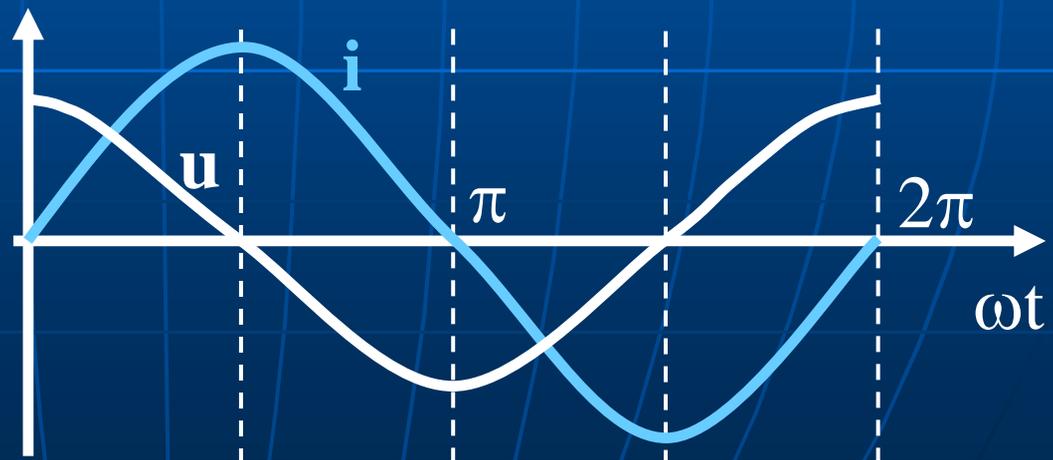
$$= I_m \omega L \sin(\omega t + 90^\circ) = U_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

- 比较上面，在电感元件电路中，在相位上电压比电流超前 90° (相位差 $\varphi = +90^\circ$)。

写成相量，有

$$\dot{I}_m = I_m / 0^\circ$$

$$\dot{U}_m = U_m / 90^\circ$$



电感电路相量形式的欧姆定律

- 前已导出

$$\dot{\mathbf{I}}_m = \mathbf{I}_m \angle 0^\circ \quad \text{或} \quad \dot{\mathbf{U}}_m = \mathbf{U}_m \angle 90^\circ$$

其中 $\mathbf{U}_m = \mathbf{I}_m \omega L$

由前两式得：

$$\dot{\mathbf{U}}_m / \dot{\mathbf{I}}_m = \omega L \angle 90^\circ = j\omega L$$

其中 $\mathbf{j} = e^{j90^\circ} = 1 \angle 90^\circ = \sqrt{-1}$

ωL 和 $j\omega L$ 分别称为感抗和复感抗。

其值与频率成正比。

电感电路的功率计算

- 当得到电感元件的电压和电流的变化规律即相互关系后，可知电感元件瞬时功率的变化规律为：

$$\begin{aligned} p &= p_L = ui = U_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) \\ &= U_m I_m \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t \\ &= UI \sin 2\omega t \end{aligned}$$

可见， p 是以幅值为 UI 、角频率为 $2\omega t$ 变化的交变量。当 u 与 i 的瞬时值为同号时， $p \geq 0$ ，电感元件取用功率(为负载)，磁能增加；当 u 与 i 的瞬时值为异号时， $p \leq 0$ ，电感元件发出功率(相当于电源)，电感元件的磁能减少。

- 电感元件平均功率为：

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T U I \sin 2\omega t dt = 0$$

即电感元件的平均功率为零。

可见，电感元件在电路中没有能量损耗，只与电源间进行能量交换。这种能量交换的规模，用无功功率 Q 来衡量。

规定无功功率为瞬时功率 p_L 的幅值 UI ，即

$$Q = UI = I^2 X_L$$

无功功率的单位是乏(Var)或千乏(kVar)。

为加以区别平均功率亦称为有功功率。

三. 电容元件极其电路

- 当一线性电容元件与正弦电源联接时，选择 u 及 i 的参考方向如右图：

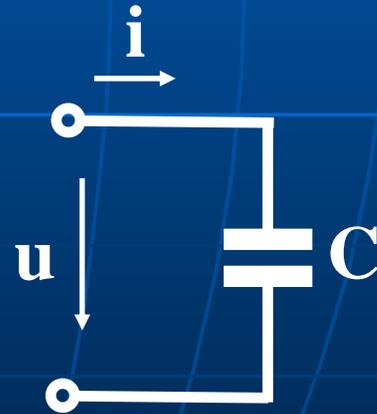
根据电磁学理论，电压变化时，电容器极板上的电荷量也要发生变化，在电路中要引起电流

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

如果电容器加正弦电压

$$u = U_m \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} \text{则 } i &= C \frac{du}{dt} = U_m \omega C \cos \omega t \\ &= U_m \omega C \sin(\omega t + 90^\circ) \\ &= I_m \sin(\omega t + 90^\circ) \end{aligned}$$



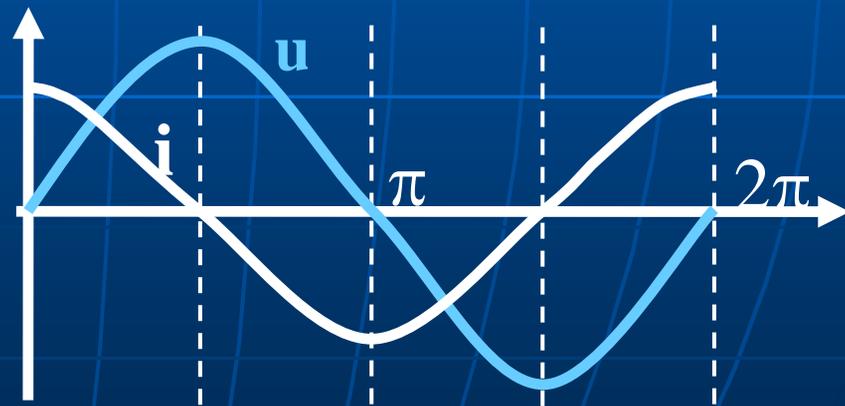
- 可见，当电容器所加电压为正弦量时，其中通过的电流也为正弦量。
- 在电容元件的电路中，电流比电压上的相位要超前 90° ($\varphi = -90^\circ$)。

规定，电压比电流的相位差超前时，相位差 φ 为正；反之相位差 φ 为负；这样便于说明电路的电感性或电容性。

由上面讨论可知

$$I_m = U_m \omega C$$

或
$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C} = X_C$$



其中 $X_C = \frac{1}{\omega C}$ 及 $\dot{X}_C = \frac{1}{j\omega C}$ 称为电容的容抗或复容抗。

■ 写出电压及电流的相量表示式

$$\dot{U}_m = U_m \underline{/0^\circ} \quad \text{及} \quad \dot{I}_m = I_m \underline{/90^\circ}$$

并考虑 $I_m = U_m \omega C$

可得 $\frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m \underline{/0^\circ}}{I_m \underline{/90^\circ}} = \frac{U \underline{/0^\circ}}{I \underline{/90^\circ}} = \frac{1}{\omega C \underline{/90^\circ}} = \frac{1}{j\omega C}$

或 $\dot{U} = \frac{\dot{I}}{j\omega C} = -jX_C \dot{I} = \dot{X}_C \dot{I}$

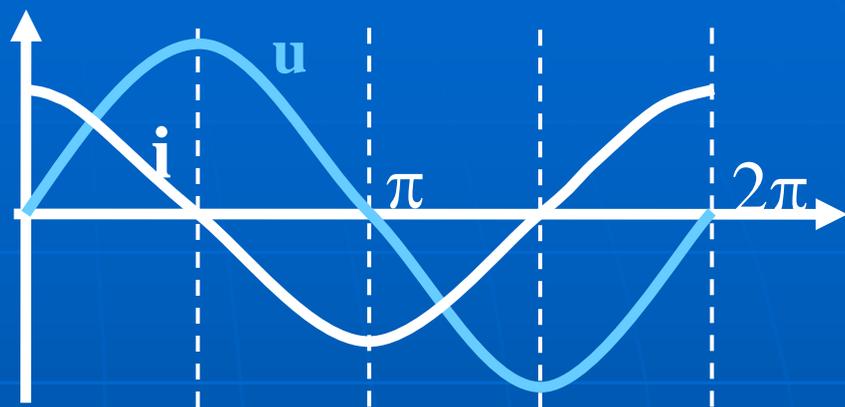
为电容电路
相量形式的
欧姆定律

电容元件的功率特性

- 根据电压电流瞬时值

$$u = U_m \sin \omega t$$

$$i = I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$



电容电路的功率瞬时值为

$$p = p_C = ui = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$= U_m I_m \sin \omega t \cos \omega t = UI \sin 2\omega t$$

电容电路的平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0$$

四. R、L、C串联的交流电路

电流与电压的关系($u \sim i$ 关系)

电阻、电感与电容元件的串联交流电路，各元件通过同一电流。若设定电流及电压的正方向以后，总电压瞬时值可由克希荷夫定律得到下式：

$$u = u_R + u_L + u_C = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int u dt$$

设电流参考量

$$i = I_m \sin \omega t$$

考虑 R L C 元件上的电压相位， u_R 与 i 同相：

$$u_R = RI_m \sin \omega t = U_{Rm} \sin \omega t$$

